

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 13 ΜΑΡΤΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Τι καλείται σημείο καμπής συνάρτησης και ποια σημεία καλούνται κρίσιμα.

(3+3μ)

B) Αν η συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

(9μ)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
2. Αν ισχύει ότι η f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$.
3. Αν f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο τότε θα ισχύει $f'(x_0) = 0$
4. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις και για κάθε $x \in [1, 7]$ ισχύει $f(x) < g(x)$ τότε $\int_1^7 f(x)dx < \int_1^7 g(x)dx$.
5. Αν η f συνεχής και $\int_{\alpha}^{\beta} (|f(x)| + 1)dx = 0$ τότε θα ισχύει $\alpha = \beta$.

(10μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνεχής πραγματική συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + x^3 = 2x^3 \ln x$ για κάθε $x > 0$.

1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι : $f(x) = \begin{cases} 2x^2 \ln x - x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών.
3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν σημεία καμπής.
4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ C_f, C_g όπου $g(x) = -x^2$ και των κατακόρυφων ευθειών $x=1$ και $x=e$.
5. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{1}{(x-6)^2} = 1 - 2\ln(x-6)$ για $x > 6$.



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν :

- Η g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $-2 < g'(x) \leq -\frac{1}{2}$ και $g(5) = -1$
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$ όπου a πραγματικός αριθμός.
1. Να δείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το οποίο κινείται πάνω στην $y = -x^2 + 2$
 2. Αν η $f(x)$ παρουσιάζει οριζόντια εφαπτομένη για $x=1$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a .
 3. Για $a=1$:
 - α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 - β. Να αποδείξετε ότι $1 \leq g(1) < 7$
 - γ. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g παρουσιάζουν μοναδικό σημείο τομής στο $[1,5)$
 - δ. Αφού δείξετε ότι η $h(x) = g(x) + 2x$ είναι γνησίως αύξουσα στην συνέχεια να αποδειχθούν
 - 1) $g(1) + 2 - 2x \leq g(x) \leq 9 - 2x$ για $x \in [1,5]$
 - 2) $4g(1) - 16 \leq \int_1^5 g(x) dx \leq 12$

(6+2+3x4+3+2μ)

ΘΕΜΑ 4^ο



Δίνεται πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $xf'(x) = (x-1)f(x)$ για κάθε $x \neq 0$
 - $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$
 - $F(x)$ αρχική της $f(x)$ για $x > 0$ με $F(e) = 1$ και $F\left(e + \frac{1}{3}\right) = 3$
1. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \frac{e^x}{x}$ για $x \neq 0$
 2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$ και στην συνέχεια να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x - \ln x = \ln a$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $a \in (0, +\infty)$
 3. Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln^3 x) = 2e - \frac{x}{\ln x}$ για $x > 1$
 4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\int_1^x \frac{e^t(t-1) \cdot f(f(t))}{t^2} dt = 2$ για $x > 0$

(6+10+5+4μ)

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΠΥΧΙΑ...

